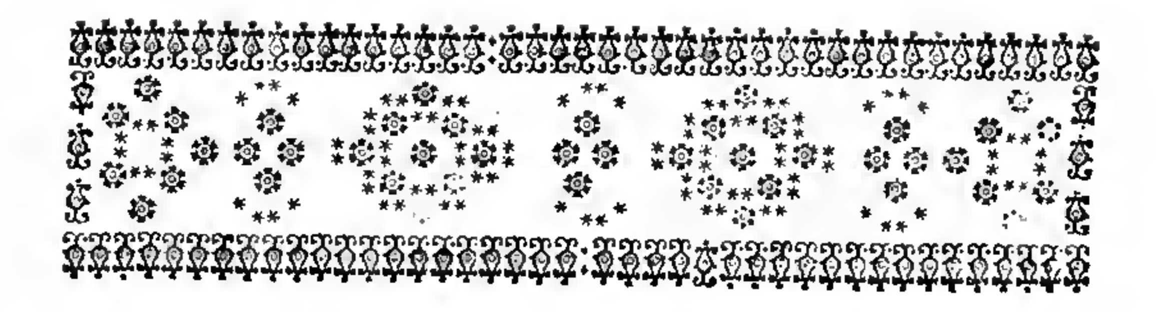


HARMONIE
ENTRE LES PRINCIPES GENERAUX DE REPOS ET DE MOUVEMENT DE *M.* DE *MAUPERTUIS*

PAR M. EULER.

I.

M. *de Maupertuis*, nôtre très digne Préſident, ayant découvert deux principes généraux, l'un pour l'état du repos ou de l'équilibre, & l'autre pour celui du mouvement, il ſemble d'abord que ces deux principes n'ont rien de commun, puisqu'ils ſont fondés ſur des élémens tout à fait differens entr'eux. Cependant je ferai voir, que l'un & l'autre de ces deux principes eſt ſoutenu ſur le même fondement, & qu'ils ſe trouvent dans la plus étroite liaiſon, de ſorte que dès qu'on tombe d'accord ſur l'un, on ne ſauroit plus revoquer en doute l'autre: ou bien, l'un étant ſuffiſamment conſtaté, tiendra lieu d'une démonſtration rigoureuſe de l'autre. Cette belle harmonie me paroit d'autant plus importante, qu'elle eſt capable de mettre dans tout ſon jour, tant l'un que l'autre de ces deux principes: & on conviendra aiſément, que plus ces deux principes

ſont unis entr'eux, & plus ils ſeront conformes à la ſimplicité de la Nature.

II. Je commencerai par le principe général du repos, ou de l'équilibre, & dés que je l'aurai énoncé dans toute ſa force conformément aux explications, que l'Illuſtre Auteur en a données dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris pour l'année 1740 on reconnoitra par le moyen d'une ſeule réfléxion, que l'autre principe général du mouvement en eſt une ſuite néceſſaire. Donc, puisque le premier principe n'eſt aſſujetti à aucune oppoſition, & qu' après l'Auteur j'en ai auſſi démontré la vérité par une infinité de cas entièrement differens entr'eux; cette harmonie ſeule ſuffira à réfuter toutes les objections, qu'on pourroit faire contre l'autre principe du mouvement. Et partant j'eſpere, que l'expoſition de cette harmonie ſera le plus propre moyen, non ſeulement pour maintenir ces deux principes, mais auſſi pour en faire voir la nouveauté: perſonne n'en ayant eu aſſeurément aucune connoiſſance avant M. *de Maupertuis*.

Or M. *de Maupertuis* énonce cette loi du repos en ces termes: " Soit un Syſtème de corps qui peſent, ou qui ſont tirés vers des " centres par des forces qui agiſſent chacune ſur chacun, comme une " puiſſance n de leurs diſtances aux centres : pour que tous ces corps " demeurent en repos, il faut que la ſomme des produits de chaque " maſſe par l'intenſité de la force & par la puiſſance $n+1$ de ſa " diſtance au centre de ſa force, (qu'on peut appeller la ſomme des " forces du repos,) faſſe un *maximum* ou *minimum*." Ainſi poſant M pour la maſſe d'un corps quelconque, qui appartient au ſyſtème, z pour la diſtance de ce corps au centre, auquel il eſt attiré par la force fz^n; on prendra le produit Mfz^{n+1} pour le corps M; & la ſomme de tous les produits ſemblables, qui conviennent à chaque corps du ſyſtème, ſera un *maximum* ou un *minimum*, lorsque le ſyſtème eſt en équilibre.

IV.

IV. M. *de Maupertuis* dévelope deux cas pour faire voir la vérité de cette loi: chacun contient un ſyſtème de trois corps liés entr'eux. Dans le premier il conſidére ces corps attachés à des rayons immatériels, mobiles autour d'un point fixe : dans l'autre il les regarde comme attachés à des cordes unies dans un point mobile : Et quoique ces deux cas ſoient entièrement differens entr'eux, il montre que dans l'un & l'autre la susdite loi ſubſiſte. Car poſant la maſſe de chacun des trois corps $= M$, la diſtance au centre, auquel il eſt attiré $= z$, & la force même $= f\, z^n$, il fait voir par les principes ordinaires de la Dynamique, que dans le cas de l'équilibre la ſomme de ces formules $M f z^n dz$, qui répondent à chacun des corps, eſt égale à zero. D'où il s'enſuit évidemment, que la ſomme de leurs intégrales, ou de $\frac{1}{n+1} M f z^{n+1}$, ſera un *maximum* ou un *minimum*; & lorsque l'expoſant n eſt partout le même, on pourra omettre le coëfficient commun $\frac{1}{n+1}$.

V. Ces deux cas étant entiérement differens entr'eux, on reconnoit aiſément, que la même régle doit avoir lieu dans tous les cas d'équilibre de trois corps; puisque, quel que ſoit l'état des corps, il doit participer de l'un & de l'autre. Il eſt auſſi évident, que ſi au lieu de trois corps le ſyſtème étoit compoſé de pluſieurs, & même d'autant que ce puiſſe être, la même régle ſubſiſteroit toujours également. De plus il n'eſt pas néceſſaire, que les forces ſoient proportionelles à de ſemblables puiſſances des diſtances; pourvû qu'on ne néglige pas les coëfficiens $\frac{1}{n+1}$, lorsqu'ils ſont differens entr'eux à l'égard des divers corps, ſur lesquels les forces agiſſent.

VI. Rien n'empêche aussi, que les forces ne soient supposées proportionnelles à des fonctions quelconques des distances. Car si chacun des corps, dont la masse soit $= M$, & la distance à un centre des forces $= z$, y est attiré par une force quelconque accélératrice $= V$, au lieu de $f z^n$; on verra par le même raisonnement, que dans l'état d'équilibre la somme de toutes les formules $M V dz$ sera égale à zero. Et partant la somme de leurs intégrales $\int M V dz$ sera un *maximum* & un *minimum*. Où il faut remarquer, comme je ferai voir plus bas, qu'il y a actuellement deux especes d'équilibre, l'une où la somme de ces formules est un *minimum*, l'autre où elle est un *maximum*.

VII. Si le même corps M, qui fait partie du systême, étoit en meme tems sollicité par plusieurs forces accélératrices V, V', V'', &c. vers des centres differens, dont il soit éloigné par des distances z, z', z'' &c. chaque force fourniroit une formule à part pour le même corps M: & l'expression entiére pour ce corps, qui fait partie de la formule du *maximum* ou du *minimum*, seroit:

$$\int M V dz + \int M V' dz + \int M V'' dz'' + \&c.$$

Ou puisque la masse du corps M est constante, cette expression

$$\text{sera} = M (\int V dz + \int V' dz' + \int V'' dz'' + \&c.)$$

& la somme de toutes les pareilles expressions, qui conviennent à chaque corps du systême, sera infailliblement on *maximum* ou un *minimum* dans le cas d'équilibre. Ou bien, puisque $M V$, $M V'$, $M V''$ &c. expriment les forces motrices; si l'on prend V, V', V'' &c. pour marquer déjà les forces motrices, notre formule sera:

$$\int V dz + \int V' dz' + \int V'' dz'' \&c.$$

VIII. Il n'est pas aussi nécessaire, qu'on considére les distances entiéres de chaque corps aux centres de forces, auxquels il est attiré: il

il ſera permis pour la commodité du calcul, de prendre à volonté dans les directions, ſelon lesquelles les corps ſont ſollicités, des points fixes, & d'employer les diſtances à ces points, qui ſoient v, v', v'' &c. au lieu des diſtances z, z', z'' &c. aux centres mêmes. Car, puisque les differences entre ces diſtances $z - v$; $z' - v'$; $z'' - v''$ &c. ſont conſtantes, on aura $dz = dv$; $dz' = dv'$ & $dz'' = dv''$. De ſorte que l'expreſſion pour la formule du *maximum* ou *minimum* ſera:

$$M(\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'' + \&c.)$$

où l'on omettra la maſſe M. lorsque V, V', V'' &c. expriment déja les forces motrices.

IX. Ayant donc un ſyſtème de corps quelconque, qui ſoit en équilibre, on conſidérera ſéparément chaque corps avec toutes les forces dont il eſt ſollicité, qui fourniront pour ce corps, dont la maſſe ſoit $= M$, une telle formule $M(\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$ &c.) lorsque V, V', V'' &c. marquent des forces accéleratrices; mais ſi elles marquent les forces motrices mêmes, on n'a qu'à omettre la maſſe M, comme y étant déjà renfermée. On raſſemblera enſuite toutes ces formules, qu'on aura trouvées pour chaque corps, ou chaque particule du ſyſtème des corps, dans une ſomme, & cette ſomme étant renduë un *maximum* ou *minimum* déterminera l'état d'équilibre. C'eſt donc à cette régle, que ſe réduit le principe univerſel d'équilibre de M. *de Maupertuis*, qui s'étend à tous les corps, ſoit qu'ils ſoient ſolides ou fluïdes, roides ou fléxibles, & même élaſtiques, comme on peut voir des Mémoires, qui ſe trouvent dans les Mém. de l'Ac. Roy. des Sciences & Belles-Lettres de Pruſſe pour l'an. 1748, où j'ai examiné ce qui eſt un *maximum* ou *minimum* dans l'état d'equilibre de tous ces differens genres de corps.

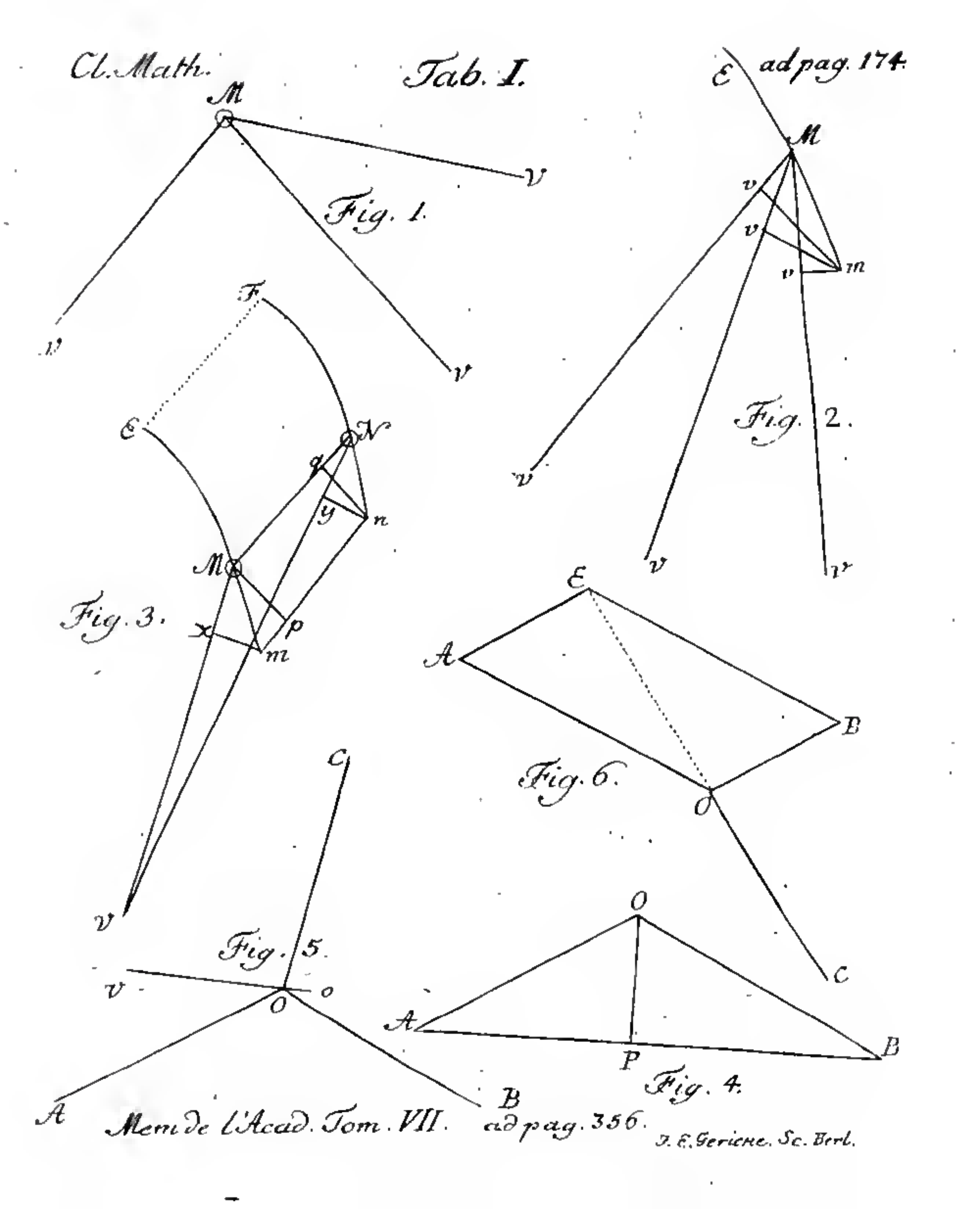
X. Puisque donc tout ce principe revient à la formule $\int V dv + \int V' dv + \int V'' dv'' +$ &c. qu'il me ſoit permis, tant pour abréger

que pour parler plus précifément, de nommer cette expreffion d'un nom particulier, & il me femble que celui d'*effort* fera le plus convenable. Car, puisque la fomme de toutes ces expreffions, qui répondent à chaque élément du corps, eft un *maximum* ou *minimum* dans l'équilibre, il ne fera pas mal à propos de dire que c'eft la fomme de tous les *efforts*, qui eft la plus grande ou plus petite dans le cas de

Fig. I. l'équilibre. Donc, fi le corps M eft follicité par les forces V, V', V'' &c. dirigées vers les points fixes V, V', V'' &c. & qu'on pofe les diftances M V $= v$, M V' $= v'$, M V'', $= v''$ &c. l'*effort* de ces forces fur le corps M fera $= \int V\, dv + \int V'\, dv' + \int V''\, dv$; ou fi les lettres V, V', V'' &c. expriment les forces accélératrices, l'*effort* fera $= M\, (\int V\, dv + \int V'\, dv' + \int V''\, dv''$ &c.)

XI. Donc, en vertu du principe général du repos de M. *de Maupertuis*, nul corps, tant folide que fluide, ne fauroit être en équilibre, à moins que la fomme de tous les efforts pris enfemble, qui agiffent fur chaque élément du corps, ne foit la moindre, ou la plus grande qu'il eft poffible. Or je ferai voir plus bas, que le plus grand ne trouve lieu qu'en des cas tout à fait particuliers, où l'équilibre ne fe rétablit pas, quand il eft troublé; dans tous les autres cas, où l'équilibre eft permanent, c'eft le plus petit qui a lieu. Je remarque ici en paffant qu'il y a bien des cas, où la fomme des efforts devient $= o$, mais tant s'en faut que ces cas foient contraires au principe, qu'ils le confirment plutôt davantage. Car la Nature ayant, pour ainfi dire, en vuë de rendre la fomme des effors la plus petite, le but principal tend fans doute à la faire evanouïr entièrement: & lorsque cela n'eft pas poffible, ce n'eft qu'alors qu'elle doit fe contenter de la rendre auffi petite qu'il eft poffible. Ce principe porte donc, qu'en tout cas d'équilibre la fomme de tous les efforts, auxquels tous les élémens du corps font affujettis, devient la plus petite qu'il eft poffible: & c'eft en peu de mots le principe de l'équilibre, ou du repos, de M. *de Maupertuis*.

XII.



J. E. Gericke. Sc. Berl.

XII. Ayant établi ce principe pour le repos, ou l'équilibre, qu'y a-t-il de plus naturel que de ſoutenir, que ce même principe ait auſſi lieu dans le mouvement de corps, ſollicités par de ſemblables forces? Car ſi l'intention de la Nature eſt d'épargner le plus qu'il eſt poſſible ſur la ſomme des efforts, il faut qu'elle s'étende auſſi au mouvement, pourvû qu'on prenne les efforts, non ſeulement comme ils ſubſiſtent dans un inſtant, mais dans tous les inſtans enſemble, que dure le mouvement. Ainſi l'effort, ou la ſomme des efforts, étant pour un inſtant quelconque de mouvement $= \Phi$, & poſant l'élément du tems $= dt$, il faut que cette formule intégrale $\int \Phi\, dt$ ſoit un *minimum*. Deſorte que ſi pour le cas de l'équilibre la quantité Φ doit être un *minimum*, les memes loix de la Nature ſemblent exiger, que pour le mouvement cette formule $\int \Phi\, dt$ ſoit la plus petite.

XIII. Or c'eſt préciſément dans cette formule, qu'eſt contenu l'autre principe de M. *de Maupertuis*, qui regarde le mouvement; quelque different qu'il puiſſe paroitre au premier coup d'oeil. Pour faire voir ce bel accord, je n'ai qu'à remarquer, que lorſqu'un corps ſe meut, étant ſollicité par les forces expoſées V, V′, V″ &c. l'effort Φ, auquel le corps eſt aſſujetti, exprime en même tems la force vive du corps, ou bien le produit de la maſſe du corps M par le quarré de ſa viteſſe. Donc, poſant ſa viteſſe $= u$, la formule qui doit être un *minimum* ſera $= \int M\, uu\, dt$: or $u\, dt$ exprime l'élément de l'eſpace, que le corps parcourt dans le tems dt, & partant poſant cet eſpace $= ds$, nous aurons $\int M\, u\, ds$ pour égaler à un *minimum*. C'eſt à dire, il faut à chaque inſtant multiplier la maſſe du corps M par la viteſſe u, & outre cela par l'eſpace parcouru ds, & la ſomme de tous ces produits doit être un *minimum*.

XIV. Me voilà ainſi conduit aux mêmes mots, dont M. *de Maupertuis* ſe ſert pour définir ſon idée de l'action, quand il dit, que l'action eſt le produit de la maſſe par la viteſſe & par l'eſpace parcouru. Ainſi dans le cas du §. précedent la formule $M\, u\, ds$ exprime la quantité

tité d'action pour un instant quelconque, précisément selon la maniere de parler de M. de *Maupertuis*; & suivant ses mémes sentimens le mouvement du corps doit être tel, que la somme de toutes les actions élémentaires, ou $\int M\, u\, d\, s$ devienne un *minimum*. Or j'ai aussi fait voir dans le IV. Volume de nos Mémoires, que ce principe fournit précisément les mémes courbes, qu'on découvre par les principes ordinaires de la Mecanique. On voit donc clairement, que ce principe de mouvement de M. *de Maupertuis* est une conséquence nécessaire de son principe général de repos ou d'équilibre.

XV. Comme dans le mouvement l'expression donnée cy-dessus $\Phi\, d\, t$ exprime précisément, ce que M. *de Maupertuis* nomme l'action du corps pendant le tems infinlment petit $d\, t$, on pourra dire avec autant de droit, que Φ marque l'action instantanée sans avoir égard au tems; auquel cas Φ convient avec ce qu'on nomme force vive. Donc aussi pour l'état de repos ou d'équilibre, quoiqu'il n'y ait point de mouvement, puisque la méme expression Φ marquant l'effort total y entre, rien n'empéche qu'on ne lui donne encore le même nom d'action, de sorte que dans ce cas l'action & l'effort seroient la même chose; & cette dénomination est aussi parfaitement bien fondée. Ainsi, suivant le sentiment de M. *de Maupertuis*, on est autorisé de dire que, tant dans le mouvement que dans le repos, la quantité d'action est toujours la moindre qu'il est possible.

XVI. Mais il faut ausi prouver ce que je viens d'avancer dans le §. VIII. & la démonstration nous éclaircira mieux sur l'accord de ce que je nomme effort, & de l'idée de l'action de M. *de Maupertuis*.
Fig. II. Pour cet effet soit le corps M attiré aux centres de forces V, V', V'' &c. par des forces V, V', V'' &c. posant les distances $VM = v$, $V'M = v'$ & $V''M = v''$ &c. dont les forces mêmes soient des fonctions quelconques: que ce corps ait jusqu'ici décrit la courbe EM, & qu'a présent sa vitesse en M soit $= u$, avec laquelle il va parcourir l'élément de la courbe $Mm = ds$, pendant l'élément du tems $= dt$, & on aura

ra $ds = u\,dt$. Or l'effort des forces sur le corps M sera suivant ce que j'ai exposé $= \int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$ &c. supposant ces forces motrices : donc exprimant l'effort par Φ nous aurons :

$$\Phi = \int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'' + \text{\&c.}$$

XVII. Maintenant pour connoitre la vitesse même du corps, qu'il aura conformément aux forces dont il est sollicité, on n'aura qu'à tirer de ces forces par la décomposition connuë les forces *tangentielles*. Pour cet effet qu'on mene du point m sur les directions des forces les perpendiculaires mv, mv', mv'' &c. & on sait par les régles de la décomposition, que la force tangentielle qui résulte de la force $Mv = V$ est $= \frac{Mv}{Mm} . V = - \frac{dv}{ds} . V$ à cause de $Mv = -dv$; de même les forces tangentielles, qui résultent des autres forces V' & V'' seront $= \frac{Mv'}{Mm} . V' = - \frac{dv'}{ds} . V'$; & $= \frac{Mv''}{Mm} . V'' = - \frac{dv''}{ds} . V''$. Donc la force tangentielle entiere sera $= - \frac{V dv - V' dv' - V'' dv''}{ds}$. Or posant cette force tangentielle $= T$ on sait par les principes de Mecanique qu'on aura $M\,du = \frac{1}{2} T\,dt$, ou bien : $2 M u\,du = T\,ds$ à cause de $ds = u\,dt$. Et partant ayant

$$2 M u\,du = - V\,dv - V'\,dv' - V''\,dv'' \text{ \&c.}$$

on aura en prenant les intégrales

$$M uu = \text{Const.} - \int V\,dv - \int V'\,dv' - \int V''\,dv'' - \text{\&c.}$$

XVIII. Donc, puisque par l'hypothese $\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$ &c. exprime l'effort des forces sur le corps M, que j'ai posé $= \Phi$, il est évident que nous aurons : $M uu = \text{Const.} - \Phi$.

 On

On comprend aiſément que la conſtante ne trouble rien dans l'harmonie, que je viens d'établir entre l'effort Φ & la force vive du corps Muu: car ſi $\int \Phi dt$ eſt un *maximum* ou *minimum*, la formule $\int Muudt$ ou $\int Muds$ le ſera auſſi, puisque le terme $\int$Conſt. $dt =$ Conſt. t n'entre pas dans la conſidération du *maximum* ou *minimum*. Et outre cela l'effort Φ étant exprimé par des formules intégrales, renferme déjà en ſoi une conſtante quelconque, de ſorte que j'aurois pu entiérement négliger cette conſtante, & poſer ſimplement $Muu = -\Phi$; d'où l'identité ſeroit d'autant plus évidente. Cependant ſi l'on prend lesdites intégrales ſur un pied fixe, de ſorte que l'effort Φ en obtienne une valeur déterminée, l'addition de la conſtante ſera néceſſaire; puisque la viteſſe du corps en M dépendant de la viteſſe imprimée au corps au commencement pourroit être quelconque: c'eſt donc de cette viteſſe initiale, que la conſtante à ajouter doit être déterminée en chaque cas propoſé. Mais de quelque quantité qu'elle puiſſe être, elle n'affecte point la détermination du *maximum* ou *minimum*.

XIX. Cependant, puisque la force vive Muu eſt égalée à l'effort Φ pris negarivement, il faut remarquer, que ſi $\int Muudt$, ou $\int Muds$, eſt un *minimum*, la formule $\int \Phi dt$ ſera un *maximum* & réciproquement Mais, quoique la difference entre un *maximum* & *minimum* paroiſſe bien grande, elle n'eſt pourtant d'aucune conſéquence dans la Nature même, puisque les *maximum* & *minimum* ne different entr'eux que par rapport aux ſignes, de ſorte que là, où une quantité quelconque Z eſt un *maximum*, la même quantité priſe négativement $-Z$ eſt en même tems un *minimum*. C'eſt auſſi la raiſon pourquoi la methode pour trouver tant les *maximum* que les *minimum* eſt abſolument la même. Ainſi qui voudroit attaquer de ce côté l'identité decouverte entre la force vive Muu & l'effort Φ, ne feroit que de pures chicanes.

XX.

XX. Mais ayant démontré l'identité entre l'effort & la force vive feulement pour le cas, où un feul corps fe trouve en mouvement, on aura lieu de douter fi la même identité fubfiftera, lorsque le mouvement renferme plufieurs corps liés entr'eux d'une maniere quelconque, qui conftituent un corps fléxible, ou même fluide. Mais auffi dans ces cas, quelque compliqués qu'ils puiffent être, je foutiens que la fomme des forces vives de tous les élémens du corps fe réduit toujours à la fomme de tous les efforts, auxquels tous les élémens font affujettis en même tems. Pour prouver cela il fuffira de confidérer feulement deux corps M & N, attachés enfemble par le moyen d'une verge M N, qui les tient toujours à une diftance donnée ; de forte que le mouvement de l'un dépend de celui de l'autre. Enfuite, pour ne pas trop embarraffer la démonftration, je ne confidérerai qu'un feul centre de force V, auquel ces deux corps foient attirés ; & on verra aifément que la même démonftration s'étend, tant à autant de corps liés enfemble qu'à autant de centres de forces qu'on voudra. Fig III.

XXI. Soient donc les diftances $MV = x$ & $NV = y$, dont les deux corps font éloignés du centre V dans l'inftant préfent. Soit X une fonction quelconque de x, qui exprime la *force* accélératrice, dont le corps M eft attiré vers V, & une fonction femblable de y qui foit $= Y$ exprimera la force accélératrice, dont l'autre corps N eft attiré vers V. Donc, pofant M & N pour les maffes des deux corps, les forces motrices, dont ils font attirés au point V, feront MX & NY ; & partant les efforts fur les corps feront, fuivant la définition que j'ai donnée, $\int MX\,dx$ & $\int NY\,dy$, ou bien $M\int X\,dx$ & $N\int Y\,dy$ à caufe des maffes conftantes. Donc, pofant la fomme des efforts $= \Phi$, nous aurons $\Phi = M\int X\,dx + N\int Y\,dy$.

XXII. Soit maintenant la viteffe du corps en $M = u$, & celle du corps en $N = v$, avec lesquelles ils parcourront pendant l'élément du tems dt les efpaces Mm & Nn, & nous aurons $Mm = u\,dt$ & $Nn = v\,dt$. Qu'on tire des points m & n aux lignes VM & VN

 les

les perpendiculaires $m x$ & $n y$, pour avoir $Mx = - dx$ & $Ny = - dy$: & la force centripete fournira pour le corps M la force tangentielle $= \frac{Mx}{Mm} . MX = - \frac{MXdx}{udt}$, & pour le corps N la force tangentielle $= \frac{Ny}{Nn} . NY = - \frac{NYdy}{vdt}$. Or les deux corps étant liés ensemble par la verge MN, cette verge se trouvera dans un certain degré de tension, qui soit $= T$, & dont elle attirera les deux corps ensemble, pour les maintenir dans la distance donnée, afin qu'il soit $mn = MN$. Donc, tirant de M à mn & de N à MN les perpendiculaires Mp & nq, on aura $mp = Nq$, & la force T agira sur le corps M avec la force tangentielle $= - \frac{mp}{Mm} . T$ $= - \frac{T.mp}{udt}$ puisqu'elle tend à retarder le mouvement, & sur le corps N avec la force tangentielle $= \frac{Nq}{Nn} . T = \frac{T.Nq}{vdt} = \frac{T.mp}{vdt}$.

XXIII. En tout donc le corps M sera sollicité par la force tangentielle $= - \frac{MXdx - T.mp}{udt}$, qui étant multipliée par l'élément du tems dt doit être égalée à $2 M du$, d'où nous tirons

$$2 M u du = - MXdx - T.mp.$$

De même maniere l'autre corps étant sollicité par la force tangentielle $- \frac{NYdy + T.mp}{vdt}$, si nous la multiplions par dt, le produit doit être égalé à $2 N dv$, ce qui fournit cette égalité:

$$2 N v dv = - NYdy + T.mp$$

Ajou-

Ajoutons maitenant ces deux égalités ensemble pour avoir:

$$2\,M\,u\,du + 2\,N\,v\,dv = -\,M\,X\,dx - Y\,dy$$

dont l'intégrale sera:

$$M\,u\,u + N\,v\,v = \text{Const.} - M\int X\,dx - N\int Y\,dy$$

ou bien à cause de $\Phi = M\int X\,dx + N\int Y\,dy$

$$M\,u\,u + N\,v\,v = \text{Const.} - \Phi.$$

XXIV. Ici il est évident que $M\,u\,u$ & $N\,v\,v$ expriment les forces vives de chacun des deux corps, de sorte que la somme des forces vives est égale à Const. $-\,\Phi$, ou simplement à $-\,\Phi$, y comprenant la constante; & partant la somme des forces vives & la somme des efforts à chaque instant sont exprimées par la même formule. Donc, si dans la poursuite du mouvement la formule $\int \Phi\,dt$ est un *maximum* ou *minimum*, comme le principe d'équilibre de M *de Maupertuis* exige, c'est absolument la même chose, que si $\int M\,u\,u\,dt + \int N\,v\,v\,dt$ ou $\int M\,u.\ Mm + \int N\,v.\ Nn$ devoit être un *minimum* ou *maximum*. Or $M\,u.\ Mm$ marque selon M. *de Maupertuis* la quantité d'action du corps M & $N\,v$, Nn celle du corps N pendant le tems dt. Par conséquent les deux principes de M. *de Maupertuis* sont aussi parfaitement d'accord, même dans la plus grande étendue.

XXV. Voilà donc une démonstration accomplie de l'identité des deux principes de Mr. *de Maupertuis*, d'où l'on voit que l'un est une conséquence nécessaire de l'autre, & qu'ayant prouvé la verité de l'un, l'autre en est également mis hors de doute. On conviendra aussi aisément, que comme j'ai dérivé le principe de mouvement de celui de repos, celui cy doit aussi être une suite de celui-là; quoique la démonstration devienne plus embarrassée. Car, si l'on veut passer du mouvement au repos, on doit supposer le mouvement infiniment petit, ce qui cause de grandes brouïlleries dans la considération des vi-

 tesses

teſſes infiniment petites, & des eſpaces qui en ſont parcourus dans un tems infiniment petit, lequels ſeront exprimés par des differentiels du ſecond ordre. Mais ayant démontré l'identité de ces principes, on n'a qu'à ſe ſervir de l'idée de l'effort dans les cas d'équilibre, & on ſera aſſeuré qu'elle revient au même, que ſi l'on étoit entré actuellement dans le détail du mouvement infiniment petit.

XXVI. Tout revient donc à prouver la verité du principe de repos, après quoi celle du principe de mouvement ne ſauroit plus être revoquée en doute. Or, outre que M. *de Maupertuis* lui-même en a donné une demonſtration fort ſolide, il en a auſſi confirmé la vérité par l'application à pluſieurs cas, où il a fait voir que l'équilibre eſt toujours parfaitement bien d'accord avec ſon principe. Et moi, ayant cherché les formules, qui ſont un *maximum* ou *minimum* dans les figures, que prennent toutes ſortes de corps, tant fléxibles qu'élaſtiques, & même fluides, étant ſollicités par des forces quelconques, ces formules renfermerent toujours exactement ce que je viens d'exprimér par le terme d'effort. Tout cela enſemble tiendra donc lieu d'une parfaite démonſtration de ce principe, de ſorte qu'il ne ſauroit plus reſter le moindre doute ſur ſa vérité. Or ces même preuves renfermeront auſſi la démonſtration de l'autre principe du mouvement, qui eſt intimément lié avec celui de l'équilibre.

XXVII. Mais il y a plus: ce principe de l'équilibre eſt non ſeulement parfaitement bien conſtaté, mais il nous conduit tout ſeul à toutes les recherches qu'on a faites jusqu'ici dans la Statique, ou Dynamique, de ſorte que par le moyen de ce ſeul principe toute la Science de l'équilibre pourroit être expliquée dans toute ſon étendue, ſans qu'on ait beſoin d'y employer quelque autre principe que ce ſoit. Cela eſt d'autant plus remarquable, qu'on ſait que jusqu'ici on s'eſt ſervi de quelques principes bien differens pour déterminer tous les differens cas de l'équilibre; car la maniere, dont on explique ordinairement la décompoſition des forces, ſuppoſe d'autres principes que ceux, dont

on

on explique la nature du levier. Il ſera donc toujours très important de découvrir un principe, qui ſeul eſt capable de fournir tous les differens cas d'équilibre, qu'on traite dans la Dynamique.

XXVIII. Donc ſi cette grande prérogative convient au principe de M. *de Maupertuis*, il n'ya aucun doute, que ce principe ne renferme quaſi l'eſſence de toutes nos connoiſſances dans la Science de l'équilibre, & qu'il ne doive être regardé comme la véritable baſe de cette Science, & comme la plus ſacrée loi de la Nature. De plus il faut auſſi tomber d'accord, que ce même principe eſt la plus heureuſe & la plus importante découverte, qu'on ait jamais fait dans cette Science, puisque jusqu'ici on n'a pu produire un tel principe, qui fût commun à tous les cas d'équilibre en général. Or ce qui mérite ſans doute la plus grande attention, c'eſt que ce principe nous découvre en même tems, pour ainſi dire, la véritable intention de la Nature, qui eſt d'agir avec les moindres dépenſes qu'il eſt poſſible.

XXIX. Je crois donc que l'importance du ſujet exige, que je faſſe voir, comment même tous les prémiers élémens de la Dynamique découlent très naturellement de ce grand principe de la Nature, en vertu duquel aucunes forces ne ſauroient ſubſiſter en équilibre, à moins que la ſomme de leurs efforts ne ſoit la plus petite. Cela contribuëra ſans doute beaucoup plus à mettre ce principe dans tout ſon jour, & à en faire voir la généralité, que n'a fait ſon application à des cas plus difficiles, que j'ai traittés dans mes Mémoires ſur cette matiere dans le IV. Volume de nos Mémoires. Par ce moyen on verra avec plus d'évidence, que toute la Dynamique, & partant auſſi la Mecanique, ſont fondées ſur ce ſeul principe, & en peuvent être expliquées, ſans qu'on ait beſoin de recourir à d'autres principes.

XXX. Je commencerai donc par le cas, où pluſieurs forces ſont appliquées à une point, & je montrerai que le point ne ſauroit être en équilibre, à moins que la ſomme des efforts ne ſoit la plus petite.

tite. C'eſt de là qu'on dérive communément le grand principe de la décompoſition des forces, qui eſt de la derniere conſéquence par toute la Statique, & les autres Sciences qui en dépendent. Je ferai donc voir que ce principe fondamental n'eſt qu'une conſéquence très naturelle du principe univerſel de l'équilibre de M. *de Maupertuis.* Pour cet effet je ſuppoſerai les forces, qui agiſſent ſur le point en queſtion, conſtantes, puisqu'on ne s'étend point dans les élémens à des forces variables.

Fig. IV. XXXI. Soit d'abord le point O ſollicité par deux forces OA, OB, vers les points fixes A & B, par le moyen ſi l'on veut de deux poids, qui lui ſont attachés par des fils AO & BO, & qui en dépendent ſur des poulies pratiquées en A & B. Soit A la force ou le poids qui tire ſuivant OA, & B celui qui tire ſuivant OB; qu'on nomme la diſtance $OA = x$ & $OB = y$, & l'effort de la force A ſera $= \int A\,dx = Ax$; & celui de la force $B = \int B\,dy = By$. Donc en vertu de notre principe le point O ne ſauroit être en repos, à moins que la ſomme des efforts $Ax + By$ ne ſoit la plus petite qu'il eſt poſſible.

XXXII. Ayant tiré la droite AB, qu'on y mene du point O la perpendiculaire OP, & ſoit $AB = a$, $AP = s$, $OP = z$; d'où l'on aura $BP = a - s$, & partant $x = \sqrt{(zz + ss)}$ & $y = \sqrt{(zz + (a-s)^2)}$. Il faut donc que cette formule ſoit un *minimum*:

$$A\sqrt{(zz + ss)} + B\sqrt{(zz + (a-s)^2)}$$

laquelle contenant deux variables z & s, il eſt clair qu'à l'égard de z elle ne ſauroit devenir plus petite que lorsque $z = o$, car ſi l'on differentie la formule propoſée en ne ſuppoſant que z variable, & qu'on mette le differentiel $= o$, on aura

$$\frac{Az\,dz}{\sqrt{(zz + ss)}} + \frac{Bz\,dz}{\sqrt{(zz + (a-s)^2)}} = o \text{ ou bien } z = o.$$

XXXIII.

XXXIII. Pour le cas d'équilibre il faut donc d'abord, qu'il ſoit $z = o$: ſoit donc $OP = z = o$, & notre formule deviendra $= As + B(a - s)$; & pour qu'elle ſoit un minimum, il faut que $A\,ds - B\,ds = o$, ou $A = B$. Donc deux forces appliquées au point O ne ſauroient être en équilibre, à moins que leurs directions ne ſoient oppoſées entr'elles, & que les forces mêmes ne ſoient égales. Voilà donc déjà le premier cas de la Statique immédiatement déduit de nôtre principe, par lequel on ſait, que pour que deux forces ſoient en équilibre, il faut qu'elles ſoient égales & contraires entr'elles.

XXXIV. Conſidérons maintenant le cas de trois forces OA, OB, & OC, dont le point O ſoit ſollicité, & que ces forces ſoient exprimées par les lettres A, B, C. Poſant donc les diſtances $OA = x$; $OB = y$; & $OC = z$, les efforts de ces trois forces ſeront: Fig. V.

$$\int A\,dx = Ax;\quad \int B\,dy = By;\quad \&\ \int C\,dz = Cz.$$

Donc il faut que $Ax + By + Cz$ ſoit un *minimum*. D'où l'on voit d'abord comme cy-deſſus, que cela ne ſauroit arriver, à moins que les points A, B, C & O ne ſe trouvaſſent dans le même plan; car ſi le point O étoit élevé au deſſus du plan ABC, l'expreſſion $Ax + By + Cz$ ſeroit plus grande, que ſi le point O ſe trouvoit dans le même plan.

XXXV. Puiſqu'il faut donc, qu'il ſoit $A\,dx + B\,dy + C\,dz = o$, ſuppoſons que le point O ſoit transporté infiniment peu en o, pour conclurre de ce changement les valeurs differentielles dx, dy & dz. Pour cet effet ſoit l'angle $AOB = p$; $BOC = q$; & $COA = r$, de ſorte que $p + q + r = 4$ angles droits. La direction du changement infiniment petit Oo étant arbitraire, qu'il ſoit pris ſur la droite VOo, & nommant l'angle $AOV = \omega$, on aura l'angle $BOV = \omega + p$, & $COV = \omega + p + q$. Donc, poſant l'intervalle infiniment petit $Oo = do$, on aura les differentiels:

$$dx = do \cos\omega;\ dy = do \cos(\omega + p),\ dz = do \cos(\omega + p + q)$$

 XXXVI.

XXXVI. Donc pour le cas d'équilibre nôtre principe exige qu'il ſoit :

$$A \cos\omega + B \cos(\omega + p) + C \cos(\omega + p + q) = 0$$

quelque valeur qu'on donne à l'angle ω. Or le dévelopement de ces coſinus donnant :

$$\left.\begin{array}{l} A\cos\omega + B\cos\omega\cos p + C\cos\omega\cos(p+q) \\ \qquad - B\sin\omega\sin p - C\sin\omega\sin(p+q) \end{array}\right\} = 0$$

il faut qu'il ſoit ſéparément

& $A + B\cos p + C\cos(p+q) = 0$

& $B\sin p + C\sin(p+q) = 0$

XXXVII. Or, puisque $p + q = 360° - r$, on aura ſin $(p+q) = -\sin r$; & partant la derniere égalité donne

$B\sin p - C\sin r = 0$ ou $B : C = \sin r : \sin p$.

Ainſi pour le cas de l'équilibre, il faut que la force O B ſoit à la force C O, comme le ſinus de l'angle A O C au ſinus de l'angle A O B. Ou bien les trois forces doivent être entr'elles, comme les ſinus des angles oppoſés; car ce qui vient d'être demontré pour les forces B & C, aura auſſi lieu pour deux autres quelconques comme A & B, &c. A & C.

XXXVIII. Si cela paroiſſoit encore douteux, on n'auroit qu'à tirer de l'équation $B\sin p = C\sin r$, ou la valeur de $B = \frac{C\sin r}{\sin p}$ ou $C = \frac{B\sin p}{\sin r}$, & la ſubſtituer dans la premiére égalité : laquelle poſant $B = \frac{C\sin r}{\sin p}$, ſe changera en cette forme :

A +

$$A + \frac{C \sin r \cos p}{\sin p} + C \cos (p + q) = o$$

Or à cauſe de $p + q = 360° - r$, on a $\cos(p + q) = \cos r$; donc l'équation deviendra étant multipliée par $\sin p$:

$$A \sin p + C (\sin r \cos p + \cos r \sin p) = o \quad \text{ou}$$

$A \sin p + C \sin(p + r) = o$; & puisque $\sin(p + r) = -\sin q$ on aura $A \sin p - C \sin q = o$, donc $A : C = \sin q : \sin p$.

XXXIX. Que les lignes OA, OB & OC ſoient priſes proportionelles aux forces mêmes, & ayant prolongé la ligne CO de l'autre côté juſqu'en E, de ſorte que OE = OC, on verra aiſément que cette ligne OE ſera la diagonale du parallelogramme AB formé des deux côtés OA & OB. Car puiſque AO : BO = ſin BOE : ſin AOE, il ſera auſſi Fig. VI.

$$AO : BO = \sin BOC : \sin AOC$$

Enſuite dans le triangle AOE on aura :

$$OA : OE = \sin AEO : \sin OAE = \sin BOC : \sin AOB$$

d'où l'on voit que OE ſera égal à OC.

XL. Donc, pour que trois forces OA, OB, OC, appliquées au point O ſoient en équilibre, il faut qu'ayant formé de deux quelconques OA & OB le parallelogramme AOBE, la troiſième OC tombe ſur la production de la diagonale EO, & qu'elle lui ſoit égale. Or cette force OC étant en équilibre avec les forces OA & OB, ſeroit auſſi en équilibre avec la force OE, qui lui eſt égale & contraire ; donc, puiſque tant les deux forces OA & OB que la ſeule force OE ſont contrebalancées par la même force OC, il s'enſuit, que la force OE eſt équivalente aux deux forces OA & OB. Voilà donc auſſi le grand principe de la décompoſition & de l'équivalence des forces, ſur lequel eſt fondée preſque toute la Dynamique, qui eſt

 une

une conséquence nécessaire du principe général de repos & d'équilibre.

XLI. Ce même principe nous conduit aussi d'abord au critère, dont on se sert ordinairement pour connoitre l'état de l'équilibre, lorsque plusieurs forces agissent sur le point O, lequel, quoiqu'il se déduise aisément du principe de la décomposition des forces, découle immédiatement de nôtre principe, sans que nous ayons besoin de supposer ce que nous venons de trouver. Soient donc appliquées au point O autant de forces OA, OB, OC, OD &c. qu'on voudra, qui soient indiquées par les lettres A, B, C, D, &c. & posant les angles $AOB = p$; $BOC = q$; $COD = r$; $DOA = s$, si nous tirons par O une ligne quelconque VZ, & que nous nommions l'angle $AOV = \omega$, nous trouverons pour le cas de l'équilibre, tout comme il a été trouvé pour trois forces, cette égalité.

Fig. VII.

$$A\cos\omega + B\cos(\omega + p) + C\cos(\omega + p + q) + D\cos(\omega + p + q + r) = 0$$

& quelque grand que puisse être le nombre des forces, on parviendra toujours à une équation semblable.

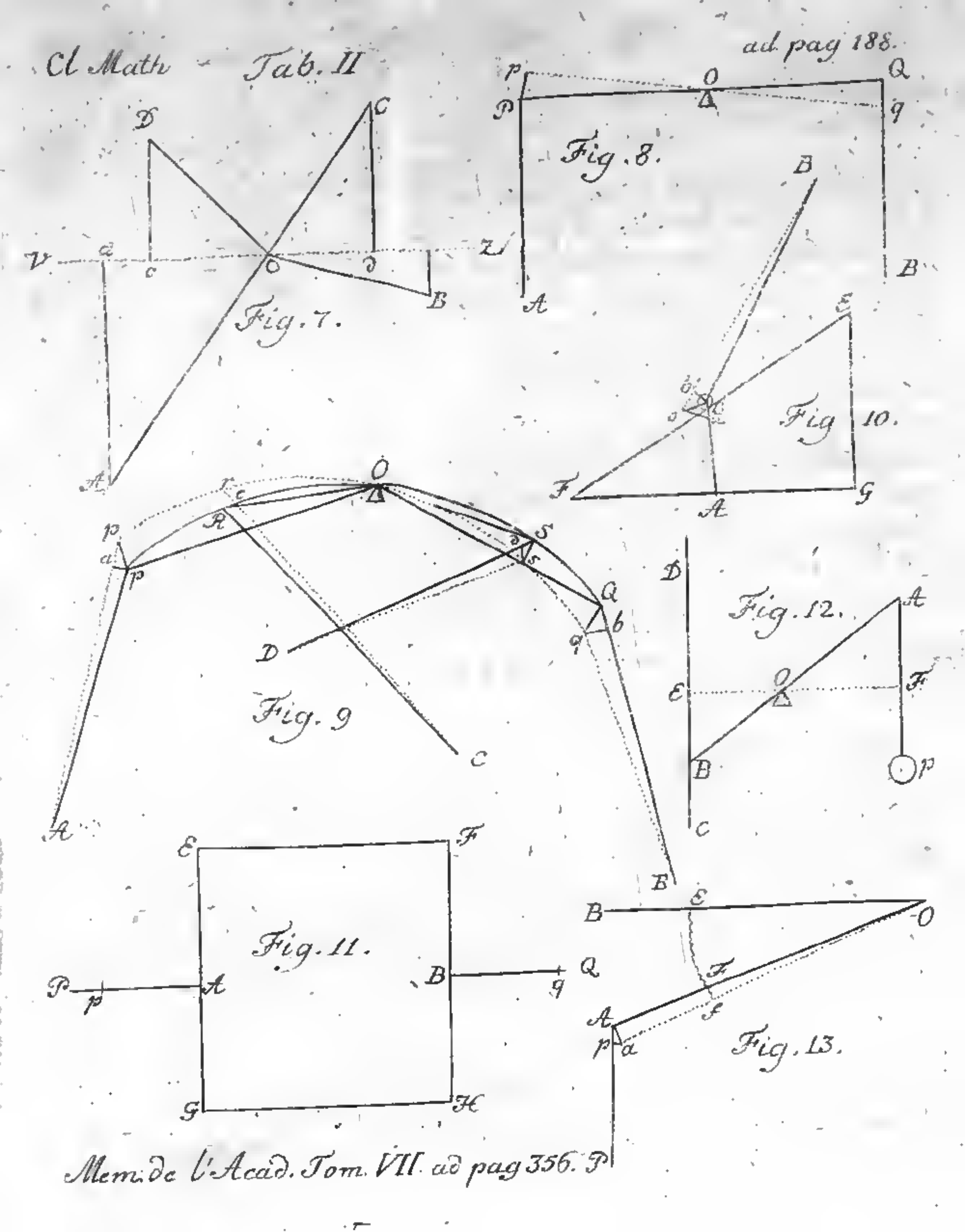
XLII. Que les lignes OA, OB, OC, OD, soient prises proportionelles aux forces mêmes A, B, C, D, de sorte que les forces puissent être exprimées par des lignes droites : & qu'on tire des points A, B, C, D, sur la droite VZ, les perpendiculaires Aa, Bb, Cc, Dd; & il est clair qu'on aura

$$Oa = OA\cos\omega;\ Ob = -OB\cos(\omega + p);\ Oc = -OC\cos(\omega + p + q);$$
$$Od = OD\cos(\omega + p + q + r)$$

Donc l'état de l'équilibre exige, qu'il soit :

$$Oa - Ob - Oc + Od = 0$$

ou bien que la somme de intervalles $Oa + Od$, qui tombent d'un côté


Cl Math
Tab. II
ad pag 188.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig 10.
Fig. 9
Fig. 12.
Fig. 11.
Fig. 13.
Mem. de l'Acad. Tom. VII. ad pag 356. P

côté du point O ſur la droite VZ, ſoit égale à la ſomme des intervalles $Ob + Oc$, qui tombe de l'autre côté.

XLIII. Puisque l'angle ω peut être pris à volonté, qu'on poſe $90° + \omega$ au lieu de ω, & puisque les coſinus ſe changeront en des ſinus, on aura pour l'état de l'équilibre :

$$A\sin\omega + B\sin(\omega+p) + C\sin(\omega+p+q) + D\sin(\omega+p+q+r) = o$$

Or nommant comme auparavant l'angle $AOV = \omega$, les perpendiculaires ſeront :

$$Aa = OA\sin\omega;\ Bb = OB\sin(\omega+p);\ Cc = -OC\sin(\omega+p+q)$$
$$\&\ Dd = -OD\sin(\omega+p+q+r)$$

& partant nous aurons :

$$Aa + Bb - Cc - Dd = o$$

De ſorte que la ſomme des perpendiculaires $Aa + Bb$, qui ſe trouvent au deſſous de la ligne VZ, doit toujours être égale à la ſomme des perpendiculaires $Cc + Dd$, qui tombent au deſſus.

XLIV. Voilà donc les deux principaux caractères, dont on juge ordinairement de l'état d'équilibre d'autant de forces que ce ſoit, qui agiſſent ſur un point donné ; & qu'on déduit communément de la décompoſition des forces. Mais ils ſont, de même que la décompoſition, une ſuite immédiate de nôtre principe général. Je pourrois de la même manière faire voir, que ce principe fournit auſſi les conditions connuës, ſous lesquelles quatre, ou pluſieurs forces, dont les directions ne ſeroient pas dans le même plan, ſe trouvent en équilibre ; mais comme cela demanderoit des figures trop compliquées, je m'en pourrai paſſer d'autant plus aiſément, qu'on peut déduire ces conditions de la décompoſition ordinaire, qui étant déja une conſéquence du principe général, il n'y a nul doute, que tous les cas plus compliqués ne le ſoient auſſi.

Fig. VIII. XLV. Je paſſe aux propriétés du levier, pour montrer qu'elles ſont également une conſéquence néceſſaire de nôtre principe. Soit donc PQ un levier droit, mobile autour du point O, aux deux bouts duquel P & Q ſoient appliquées les forces PA & QB, dont les directions ſoient d'abord perpendiculaires au levier. Poſant donc ces forces $PA = A$ & $QB = B$, & les diſtances $PA = x$ & $QB = y$. les efforts ſeront Ax & By, dont la ſomme $Ax + By$ devant être un *minimum*, il faut qu'il ſoit $Adx + Bdy = o$. Que le levier change infiniment peu de poſition en pOq, & on aura $dx = Pp$ & $dy = -Qq$; d'où l'on aura $A.Pp - B.Qq = o$, ou $A:B = Qq:Pp$. Or $Qq:Pp = OQ:OP$; & partant les forces $A:B = OQ:OP$ ou $A.OP = B.OQ$, ce qui eſt la propriété principale du levier.

Fig. IX. XLVI. Mais, ſans ſuppoſer cette propriété principale du levier, nous pourrons d'abord tirer immédiatement de nôtre principe la theorie générale du levier, de quelque figure qu'il ſoit, & de quelques forces qu'il ſoit ſollicité. Soit donc propoſé un levier courbe quelconque PROSQ, mobile ſur ſon appuy O, auquel ſoient appliquées les forces $PA = A$; $QB = B$; $RC = C$; $SD = D$; ſelon des directions quelconques. Qu'on tire du point O aux points d'application de ces forces les droites OP, OQ, OR, OS, & ſoient les angles :

$$APO = \alpha;\ BQO = \beta;\ CRO = \gamma;\ DSO = \delta$$

De plus prenant dans les directions des forces à volonté des points fixes A, B, C, D, ſoient les diſtances :

$$AP = p;\quad BQ = q;\quad CR = r;\quad DS = s$$

& la ſomme des efforts de ces forces ſera $= Ap + Bq + Cr + Ds$. Donc pour l'état d'équilibre on aura: $Adp + Bdq + Cdr + Dds = o$.

XLVII.

XLVIII. Pour trouver le rapport de ces differentiels, qu'on conçoive le levier tourner infiniment peu autour du point O, de sorte qu'il parvienne dans la situation $p\,r\,O\,s\,q$, ayant changé d'un angle infiniment petit $= d\omega$. Par ce mouvement les points P, Q, R, S, décriront autour du point O des arcs de cercles $Pp = OP.\,d\omega$; $Qq = OQ.\,d\omega$; $Rr = OR.\,d\omega$; $Ss = OS.\,d\omega$. Qu'on décrive aussi des centres A, B, C, D les arcs de cercles Pa; qb; Rc; sd. Maintenant l'angle APO étant $= \alpha$, & les angles APa & OPp droits l'angle pPa sera $= 180° - \alpha$, donc $\sin pPa = \sin\alpha$. & partant $ap = dp = Pp \sin\alpha = OP.\,d\omega.\sin\alpha$: & de la même manière on aura $cr = dr = Rr \sin\gamma = OR.\,d\omega \sin\gamma$. De l'autre côté ayant l'angle $BQO = \beta$ & $OQq = 90°$, on aura $qQb = \beta - 90°$, & $Qqb = 180° - \beta$: donc $\sin Qqb = \sin\beta$, & partant $Qb = -dq = Qq \sin\beta = OQ.\,d\omega \sin\beta$: & pareillement on obtiendra $Sd = -ds = Ss \sin\delta = OS.\,d\omega \sin\delta$.

. XLVIII. Ayant donc:

$dp = OP.d\omega\sin\alpha$; $dr = OR.d\omega\sin\gamma$; $dq = -OQ\sin\beta$; $ds = -OS.d\omega\sin\delta$,

nous trouverons pour le cas d'équilibre, en divisant par $d\omega$ cette équation:

$$A.\,OP.\sin\alpha + C.\,OR.\sin\gamma = B.\,OQ\sin\beta + D.\,OS.\sin\delta$$

Or on sait que $A.\,OP.\sin\alpha$ exprime le moment de la force PA sur le point O, & partant le contenu de cette équation est, que la somme des moments d'un côté des points d'appuy O est égale à la somme des moments de l'autre côté: & c'est en quoi consiste toute la doctrine du levier.

XLIX. Le plan incliné fournit aussi dans la Statique un sujet, qui demande un dévelopement particulier; mais qui se déduit aussi immédiatement de nôtre principe. Soit EF un plan incliné sur la base horizontale FG; sur lequel soit un corps O, soutenu par une force,

ce, qui se tire selon la direction OB; & on demande les conditions sous lesquelles le corps O se trouvera en équilibre. Soit l'angle de l'inclinaison du plan EFG $= \gamma$; & l'angle BOE, que fait la direction de la force OB avec le plan incliné FE, $= \delta$; le poids du corps O, ou la force dont il est sollicité en bas selon la verticale OA $=$ A, & la force OB, qui le soutient $=$ B. Qu'on nomme donc la distance OA $= x$ & OB $= y$; & la somme des efforts de ces deux forces sera $= A.x + By$, qui doit être la plus petite, & partant $A\,dx + B\,dy = o$.

L. Que le corps O change infiniment peu de position sur le plan incliné, & qu'il parvienne en o, étant avancé par l'espace, $Oo = ds$. Qu'on tire du point o sur O A la perpendiculaire oa, & de O sur Ba la perpendiculaire Ob, & après ce changement il est clair, qu'il y aura $Oa = -dx$ & $ob = dy$. Or à cause de l'angle $Ooa = \gamma$ on aura $Oa = ds \sin\gamma$, & l'angle $Oob = EOB = \delta$ donnera $ob = ds \cos\delta$, de sorte que $dx = -ds \sin\gamma$ & $dy = ds \cos\delta$. Donc pour l'état d'équilibre il faut, qu'il soit $A\,ds \sin\gamma + B\,ds \cos\delta = o$, ou $A \sin\gamma = B \cos\delta$; ou la force O B sera au poids du corps O comme le sinus de l'élévation du plan incliné au cosinus de l'angle E O B, que fait la direction de la force O B avec le plan incliné : & cette même proportion se tire des principes ordinaires de la Statique.

LI. Cela pourroit suffire pour faire voir, que tous les cas d'équilibre, qu'on explique dans la Statique, découlent très naturellement de nôtre principe général, de sorte que par son seul moyen toute cette Science pourroit être parfaitement achevée. Or je remarque de plus, que ce principe fournit les conditions requises à l'équilibre, très souvent beaucoup plus promtement que les principes ordinaires. Car, lorsque le cas est fort compliqué, on doit en suivant les principes ordinaires considérer dans chaque combinaison les forces, dont les parties agissent l'une sur l'autre, ce qui doit se faire par la décomposition

ſition des forces. Mais en employant nôtre principe général, on parvient au but, ſans avoir beſoin de tous ces détails.

LII. Pour nous convaincre entièrement de cet important avantage, ſoit renfermée dans la Caiſſe EFGH une Machine quelconque, composée d'autant de pièces que l'on veut, ſans que nous en ſachions même la conſtruction. Que cette Machine ſoit employée à vaincre une certaine réſiſtence, par le moyen d'une force AP, qui s'applique à la Machine; or la force de la réſiſtence ſoit repréſentée par BQ: ſoit la première $=$ P & celle-cy $=$ Q. Soient de plus les diſtances AP $= x$; BQ $= y$, & en vertu de nôtre principe ces deux forces ne ſauroient être en équilibre, à moins que la ſomme des efforts $Px + Qy$ ne ſoit la plus petite, ou $Pdx + Qdy = 0$. Or pour avoir le rapport des differentiels dx & dy, ſuppoſons que la force AP avance par l'eſpace Pp, & qu'en même tems la réſiſtence BQ cede par l'eſpace Qq; cela poſé on aura $dx = Pp$ & $dy = -Qq$: donc dans le cas d'équilibre il y aura $P.Pp = Q.Qq$. Fig. XI.

LIII. Voici donc le principe général de toutes les Machines, qui découle immédiatement du principe univerſel de repos; or, quoique ce principe ſoit déjà connu il y a longtems, il faut remarquer, qu'on l'a conclu d'un grand nombre de cas particuliers, & que perſonne n'en a encore donné une démonſtration rigoureuſe: de ſorte qu'on peut plutôt ſoutenir, que ce principe tire ſa certitude de nôtre principe univerſel. Mais peut-être me voudroit-on objecter, que le principe général d'équilibre n'eſt pas réellement different de ce principe général de toutes les Machines; & puisque celui-ci eſt depuis longtems connu, on revoquera ſous ce prétexte en doute la nouveauté de celuy-là. Comme c'eſt l'unique endroit, où l'on puiſſe attaquer ce grand principe de M. *de Maupertuis*, il ſera bon de prévenir cette objection.

Or je remarque d'abord, que le ſujet du principe de Mécanique, d'où l'on explique l'état d'équilibre de toutes les Machines, eſt entière-

tièrement different du ſujet du principe général de repos ; car celui-là roule ſur l'égalité des produits qu'on trouve, lorsqu'on multiplie d'un côté la force mouvante, & de l'autre côté la réſiſtence, par l'eſpace qu'elles parcourent, la Machine étant miſe en mouvement; au lieu que celui-ci exige un *minimum* dans la ſomme des efforts. En ſecond lieu, le principe des Machines ne s'étend que ſur deux forces, dont l'une met la Machine en mouvement, & l'autre eſt celle de la réſiſtence, qui s'oppoſe au mouvement: tandis que le principe général de repos eſt applicable à autant de forces que ce ſoit. En troiſième lieu, le principe des Machines ſuppoſe les forces conſtantes, pendant que l'autre principe s'étend à des forces variables ſelon une loi quelconque. Par conſéquent, ce principe ayant tant un ſujet tout à fait different, qu'une étenduë infiniment plus grande, ne ſauroit en aucune manière être confondu avec l'autre; & partant ſa nouveauté ne ſauroit être révoquée en doute.

LV. Mais outre cela on eſt abſolument obligé d'avouër, que ce principe des Machines eſt fort borné, quelque général qu'il puiſſe paroitre d'ailleurs, n'étant applicable qu'à des Machines, où il s'agit de l'équilibre entre deux forces, l'une mouvante, & l'autre réſiſtente: & perſonne ne s'eſt encore aviſé de déduire de ce principe les courbures des corps fléxibles, comme celle de la Catenaire, & encore moins des corps élaſtiques, ſans rien dire de la figure des corps fluïdes, qu'ils doivent prendre étant ſollicités par des forces quelconques. Or j'ai déja fait voir, que toutes ces figures ſe découvrent très heureuſement par le moyen du principe général de repos de M. *de Maupertuis*; de ſorte qu'on a toutes les raiſons poſſibles de regarder ce principe comme la plus importante découverte dans la Mecanique.

LVI. Dans tous les cas d'équilibre, que j'ai examinés jusqu'ici par le moyen de ce principe, la ſomme des efforts eſt ſans contredit un *minimum*; mais il y a auſſi des cas d'équilibre, où la ſomme des efforts devient un *maximum*. Car il faut remarquer que les forces ſe doivent

doivent néceſſairement ſoutenir en équilibre dans l'un & l'autre cas; auſſi bien quand la ſomme de leurs efforts eſt un *maximum*, que quand elle eſt un *maximum*. Mais l'équilibre qui réſulte du cas du *maximum*, eſt d'une nature tout à fait differente de celui, qui renſerme un *minimum*; il y a à peu près la même difference, que lorsqu'uo cone repoſe, ou ſur ſa baſe, ou ſur ſa pointe, où l'un & l'autre cas eſt poſſible; & le premier répond au *minimum*, & l'autre au *maximum*.

LVII. Comme la methode eſt la méme, ſoit qu'on veuïlle chercher le *maximum* ou le *minimum*, nôtre principe général nous conduit également aux équilibres de l'une & de l'autre eſpece, quoiqu'ils ſoient eſſentiellement differens entr'eux. La difference eſt la méme que celle qui ſe trouve entre les deux ſituations mentionnées d'un cone; car un équilibre qui réſulte d'un *minimum* eſt d'une telle nature, que lorsqu'il ſouffre un changement infiniment petit, il ſe rétablit de ſoi même: au lieu qu'un équilibre, où la ſomme des efforts eſt un *maximum*, ne ſe rétablit point après un tel changement, mais s'en éloigne plutôt de plus en plus: tout comme un cone, qui repoſe ſur ſa pointe, tombe entiérement, dès qu'on y touche tant ſoit peu.

LVIII. Pour donner un exemple où l'effort eſt un *maximum*, Fig. XII.
je me ſouviens d'un cas ſingulier, qui m'a été propoſé autrefois. CD eſt une muraille fixe, contre laquelle il faut appuyer le levier AB, en ſorte qu'étant ſoutenu ſur un point O fixe, & ſollicité en A par un poids P, il demeure en équilibre. On ſuppoſe tant la muraille que le point parfaitement poli, de ſorte que le levier puiſſe gliſſer librement ſans y rencontrer le moindre frottement; on ſuppoſe auſſi, quaod on veut, le levier deſtitué de peſanteur, de ſorte qu'il n'y ait point d'autre force, que le poids P, dont il ſoit ſollicité: car il ſeroit aiſé de ramener à ce cas celui, où le levier ſeroit auſſi peſant. Ce cas, qui d'ailleurs n'eſt pas ſi aiſé à réſoudre par les principes ordinaires de la Mecanique, eſt remarquable par cette circonſtance, qu'il peot être employé à trouver deux moyennes proportiooelles entre deux lignes données.

LIX. Soit donc la longueur du levier AB $= a$, la diſtance du pivot O à la muraille OE $= b$, le poids ou la force, dont le bout A eſt tiré en bas $= P$: ou, ce qui revient au même, ſuppoſons que le point A ſoit tiré par cette force au point fixe F pris dans la ligne EOF. Poſant donc la diſtance AF $= z$, l'effort ſera $= Pz$, qui devant être un *maximum*, donne Pdz ou $dz = o$: car il eſt évident, que la diſtance AF ne ſauroit être miſe un *minimum*, attendu que plus le bout B gliſſe ou en haut ou en bas, la diſtance AF peut devenir plus petite.

LX. Poſons donc, pour découvrir ce cas d'équilibre, la partie du levier entre la muraille & le pivot OB $= x$, & à cauſe de OE $= b$, on aura BE $= \sqrt{(xx - bb)}$. Donc, puisque AO $= a - x$, on aura OB: BE $=$ OA: AF, & partant:

$$AF = z = \frac{(a-x)\sqrt{(xx-bb)}}{x} = \frac{a}{x}\sqrt{(xx-bb)} - \sqrt{(xx-bb)},$$ d'où l'on tire:

$$dz = \frac{abbdx}{xx\sqrt{(xx-bb)}} - \frac{xdx}{\sqrt{(xx-bb)}} = \frac{dx(abb-x^3)}{xx\sqrt{(xx-bb)}}$$

Il faut donc qu'il ſoit $x^3 = abb$ ou $x = \sqrt[3]{abb}$: ou bien la partie OB ſera la premiere des deux moyennes proportionelles entre les lignes OE & AB. Or cette même ſoluion ſe tire auſſi des principes ordinaires de Mécanique.

LXI. Mais n'ayant conſidéré jusqu'ici que des forces conſtantes, j'ajouterai encore un mot ſur des forces variables, & en particulier ſur la force des reſſorts, en quoi ſera contenuë la régle de M. *Bernoulli* que j'ai expliquée dans mes Mémoires du Vol. IV. des Mém. de l'Academ. pour trouver les efforts des forces elaſtiques. Soit donc AO un levier mobile autour du point O, qui ſoit attaché au platfond ſixe OB par le moyen d'un reſſort EF bandé en arc de cercle du centre O; & ſuppoſons que la force de ce reſſort ſoit proportionnelle à l'angle BOA, de ſorte que le levier en ſoit toujours ſollicité perpendiculairement au point F. Soit enſuite ce même levier tiré en bas au point

Fig. XIII.

point A par une force conſtante A P, & on demande les conditions, ſous lesquelles ce levier ſera en équilibre.

LXII. Soit la ligne O B horizontale, A P verticale; & poſant la force A P $=$ A & la diſtance A P $= x$, priſe du point A à un point fixe P dans la même direction; l'effort de cette force ſera $= Ax$. Mais pour l'effort de la force du reſſort, ſoit l'angle B O A $= \phi$, & la force du reſſort dans cet état $= \frac{E\phi}{\alpha}$, ſuppoſant ſa force pour un angle conſtant $\alpha = E$. Soit de plus l'intervalle O E $=$ O F $= f$. Or pendant que le levier avance un peu de l'angle infiniment petit A O $a = d\phi$, le reſſort ſera étendu de plus par l'eſpace F $f = f\,d\phi$. Nous aurons donc une force $= \frac{E\phi}{\alpha}$ à laquelle répond l'élement d'eſpace $f\,d\phi$: donc ſon effort ſera $= \int \frac{E\phi}{\alpha} \cdot f\,d\phi = \frac{Ef}{2\alpha} \cdot \phi\phi$.

LXIII. Ayant donc la ſomme des efforts $= Ax + \frac{Ef}{2\alpha} \cdot \phi\phi$, pour l'état d'équilibre, il faut qu'il ſoit $A\,dx + \frac{Ef}{\alpha}\phi\,d\phi = o$. Or le levier étant parvenu dans ſon état voiſin O a, le point A ſera transporté en a, par l'arc A $a = a\,d\phi$, poſant la longueur du levier O A $= a$, & tirant la ligne horizontale ap, nous aurons $dx = -Ap$: mais l'angle aAp étant $=$ B O A $= \phi$, on obtiendra $Ap = a\,d\phi$ cof ϕ, d'où nous tirons:

$$-Aa\,d\phi \operatorname{cof}\phi + \frac{Ef}{\alpha}\phi\,d\phi = o, \text{ ou } Aa \operatorname{cof}\phi = \frac{Ef}{\alpha}\phi.$$

Or il eſt évident que c'eſt la vraye condition de l'équilibre, car Aa cof ϕ exprime le moment de la force A P $=$ A ſur le point O, & $\frac{Ef}{\alpha}\phi =$

E ϕ.

$\frac{E\phi}{a}.f$ le moment de la force du reſſort, leſquels moments doivent être égaux entr'eux.

LXIV. Delà on voit réciproquement que l'effort du reſſort, que nous venons de trouver $= \frac{Ef}{2a}.\phi\phi$, eſt juſtement exprimé; & partant on en ſera auſſi aſſeuré de la juſteſſe de la régle de M. *Bernoulli*, que j'ai expliquée dans mes Mém. allégués, pour trouver l'effort de l'élaſticité dans les courbes élaſtiques. Car $\frac{Ef}{a}$ exprime ce, que j'y ai nommé l'élaſticité abſolue, & puiſque l'angle BOA $= \phi$ y eſt infiniment petit, il ſera proportionnel réciproquement au rayon de la développée; lequel donc étant poſé $= r$, l'effort de l'élaſticité ſera exprimé en ſorte $\frac{C}{rr}$, prenant C pour la juſte quantité conſtante; & c'eſt préciſément l'expreſſion de M. *Bernoulli* dont je me ſuis ſervi dans l'endroit allégué.



SUR